Θεώρημα: Κριτήριο Riemann

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη. Τότε, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει μια διαμέριση P στο $[a,b]$, ώστε:
$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$.

Απόδειξη:

($\Leftarrow$) Αντίστροφα, για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει διαμέριση $P(=P_\varepsilon)$ του $[a,b]$, ώστε: $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$.

Για να δείξουμε ότι $\underline{\int_a^b} f(x)dx=\overline{\int_a^b} f(x)dx$ αρκεί να δείξουμε ότι

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx-\underline{\int_a^b} f(x)dx<\varepsilon \quad \forall \varepsilon>0$$

Έστω $\varepsilon>0$. Τότε, υπάρχει P διαμέριση $[a,b]$ ώστε

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon.$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx\le U(f,P)<L(f,P)+\varepsilon\le\underline{\int_a^b} f(x)dx+\varepsilon$$

και άρα $\overline{\int_a^b} f(x)dx-\underline{\int_a^b} f(x)dx<\varepsilon$.

Εφόσον αυτό συμβαίνει $\forall\varepsilon>0$.

$\overline{\int_a^b} f(x)dx=\underline{\int_a^b} f(x)dx$ η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Πόρισμα: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν υπάρχει μια ακολουθία διαμερίσεων $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του $[a,b]$ ώστε $\lim_n (U(f,P_n)-L(f,P_n))=0$.

Απόδειξη:

($\Rightarrow$) Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, εφαρμόζοντας το κριτήριο Riemann για $\varepsilon=\frac{1}{n}$, υπάρχει P_n διαμέριση του $[a,b]$ ώστε:
$U(f,P_n)-L(f,P_n)<\frac{1}{n}$. Έτσι $\underset{\downarrow\ 0}{0}\le U(f,P_n)-L(f,P_n)<\underset{\downarrow\ 0}{\frac{1}{n}}$.

Άρα, $\lim_n (U(f,P_n)-L(f,P_n))=0$.

($\Leftarrow$) Έστω $\varepsilon>0$.

$\exists n$ $U(f,P_n)-L(f,P_n)<\varepsilon$

και το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο Riemann.

Παρατήρηση: Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη και $I\in\mathbb{R}$, και βρούμε μια ακολουθία διαμερίσεων $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του $[a,b]$ ώστε $U(f,P_n)\to I$ και $L(f,P_n)\to I$, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη και $\int_a^b f(x)dx = I$

Εφαρμογές-Παραδείγματα:

1) Έστω $c\in\mathbb{R}$ και $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=c$ $\forall x\in[a,b]$.

Έστω $P=\{a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b\}$ τυχαία διαμέριση του $[a,b]$.

Για κάθε $k=1,\dots,n$ $m_k=\inf\{f(x) \ x\in[x_{k-1},x_k]\}=c$

$M_k=\sup\{f(x) \ x\in[x_{k-1},x_k]\}=c$

Άρα, $L(f,P)=\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})=c\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})=c\cdot(x_n-x_0)=c(b-a)$.

Ομοίως, $U(f,P)=c\cdot(b-a)$.

$\underline{\int_a^b} f(x)dx=\sup\{L(f,P) \ P \text{ διαμέριση του } [a,b]\}=c\cdot(b-a)$

$\overline{\int_a^b} f(x)dx=\inf\{U(f,P) \ P \text{ διαμέριση του } [a,b]\}=c\cdot(b-a)$.

Επομένως, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη και $\int_a^b f(x)dx=c(b-a)$.

2) Η συνάρτηση Dirichlet $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$

δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη:

Έστω $P=\{0=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=1\}$ τυχαία διαμέριση του $[0,1]$.

Για κάθε $k=1,\dots,n$ $m_k=\inf\{f(x) \ x\in[x_{k-1},x_k]\}=0$

$M_k=\sup\{f(x) \ x\in[x_{k-1},x_k]\}=1$.

Έχουμε $m_k\geq 0$ $\forall k$ (εφόσον $f(x)\geq 0$ $\forall x$) και εφόσον πάντα υπάρχει άρρητος αριθμός μεταξύ του x_{k-1} και του x_k, προκύπτει $\boxed{m_k=0}$.

Έχουμε $M_k\leq 1$ $\forall k$ (εφόσον $f(x)\leq 1$ $\forall x$) και εφόσον πάντα υπάρχει ρητός αριθμός μεταξύ του x_{k-1} και του x_k, προκύπτει $\boxed{M_k=1.}$

$L(f,P)=\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n} 0(x_k-x_{k-1})=0$

$U(f,P)=\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n} 1(x_k-x_{k-1})=x_n-x_0=1-0=1$.

Συνεπώς, $\underline{\int_a^b} f(x)dx=\sup\{L(f,P) \ P \text{ διαμέριση του } [0,1]\}=0$

και αντίστοιχα $\overline{\int_a^b} f(x)dx=\inf\{U(f,P) \ P \text{ διαμέριση του } [0,1]\}=1$.

Εφόσον: $\underline{\int_a^b} f(x)dx\neq\overline{\int_a^b} f(x)dx$ η f δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

3) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x$

Για κάθε n θεωρούμε τη διαμέριση P_n του $[0,1]$ σε n διαστήματα ίσου μήκους.

$$P_n=\{0=x_0<\underset{1/n}{\overset{\shortparallel}{x_1}}<\underset{2/n}{\overset{\shortparallel}{x_2}}<\dots<x_n=1\}$$

$$x_k=\frac{k}{n}\quad \forall k=0,1,2,\dots,n.$$

Εφόσον η f είναι αύξουσα $\forall k=1,\dots,n$.

$$m_k=\inf\{f(x)\ \ x\in[x_{k-1},x_k]\}=f(x_{k-1})=f\left(\frac{k-1}{n}\right)=\frac{k-1}{n}$$

$$M_k=\sup\{f(x)\ \ x\in[x_{k-1},x_k]\}=f(x_k)=f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{k}{n}$$

Έτσι, $L(f,P_n)=\sum_{k=1}^{n}m_k(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}(0+1+\dots+(n-1))=$

$$=\frac{1}{n^2}\frac{(n-1)(n)}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}.$$

και $U(f,P_n)=\sum_{k=1}^{n}M_k(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}(1+2+\dots+n)=$

$$=\frac{1}{n^2}\frac{(n)(n+1)}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$$

Έτσι $L(f,P_n)\to 1/2$ και $U(f,P_n)\to 1/2$.

Επομένως η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη και $\int_0^1 f(x)dx=1/2$.

4) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$

Για κάθε n θεωρούμε τη διαμέριση:

$$P_n=\{0=x_0<\underset{1/n}{\overset{\shortparallel}{x_1}}<\underset{2/n}{\overset{\shortparallel}{x_2}}<\dots<x_n=1\}$$

με $x_k=\frac{k}{n}\quad \forall k=0,1,\dots,n.$

$$m_k=\inf\{f(x)\ \ x\in[x_{k-1},x_k]\}\overset{f\text{ αύξουσα}}{=\!=\!=}f(x_{k-1})=x_{k-1}^2=\left(\frac{k-1}{n}\right)^2$$

$$M_k=\sup\{f(x)\ x\in[x_{k-1},x_k]\}\overset{f\text{ αύξουσα}}{=\!=\!=}f(x_k)=x_k^2=\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

$L(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 =$

$= \frac{1}{n^3}(0+1+\dots+(n-1)^2) = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{2n^2-3n+1}{6n^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \to 1/3$

$U(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 =$

$= \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \to 1/3$

Συνεπώς, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη και $\int_0^1 f(x)dx = 1/3$.

5) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}$

Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τις ίδιες διαμερίσεις με πριν (σε ν ίσα υποδιαστήματα, αλλά θα είναι σχετικά δύσκολος ο υπολογισμός).

Θεωρούμε τώρα τη διαμέριση:

$$P_n = \{0 = \underset{(0/n)^2}{x_0} < \underset{(1/n)^2}{x_1} < \underset{(2/n)^2}{x_2} < \dots < \underset{(n/n)^2}{x_n} = 1\}$$

με $x_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \quad k = 0, 1, \dots, n$.

$m_k = \inf\{f(x) \quad x \in [x_{k-1}, x_k]\} \overset{f \text{ αύξουσα}}{=} f(x_{k-1}) = \sqrt{\left(\frac{k-1}{n}\right)^2} = \frac{k-1}{n}$.

$M_k = \sup\{f(x) \quad x \in [x_{k-1}, x_k]\} \overset{f \text{ αύξουσα}}{=} f(x_k) = \sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^n} = \frac{k}{n}$.

$x_k - x_{k-1} = \left(\frac{k}{n}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 = \frac{k^2 - (k^2 - 2k + 1)}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}$

$L(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)\left(\frac{2k-1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (2k^2 - 3k + 1) =$

$= \frac{1}{n^3}\left(2\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1\right) = \frac{1}{n^3}\left(2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3\frac{n(n+1)}{2} + n\right) \to 2/3.$

$U(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{2k-1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (2k^2 - k) =$

$= \frac{1}{n^3}\left(2\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k\right) = \frac{1}{n^3}\left(2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right) \to 2/3.$

Συνεπώς, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη και $\int_0^1 f(x)dx = 2/3$.

Θεώρημα: Κάθε μονότονη συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη. (5)

Απόδειξη:

Υποθέτουμε f αύξουσα (η απόδειξη είναι όμοια για f φθίνουσα).

$\forall x\in[a,b]$ $f(a)\le f(x)\le f(b)$. Άρα, η f φραγμένη.

Έπειτα θεωρούμε τη διαμέριση P_n που χωρίζει το $[a,b]$ σε n το πλήθος διαστήματα ίσου μήκους.

$$P_n=\{a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b\}.$$

$$x_k=a+k\frac{b-a}{n}\qquad k=0,1,\dots,n.$$

$$\left.\begin{aligned} m_k&=\inf\{f(x)\ \ x\in[x_{k-1},x_k]\}=f(x_{k-1})\\ M_k&=\sup\{f(x)\ \ x\in[x_{k-1},x_k]\}=f(x_k).\end{aligned}\right\}\ \text{επειδή η } f \text{ είναι αύξουσα}$$

Επίσης, $x_k-x_{k-1}=\dfrac{b-a}{n}$

$$L(f,P_n)=\sum_{k=1}^{n}m_k(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}f(x_{k-1})\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$U(f,P_n)=\sum_{k=1}^{n}M_k(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$U(f,P_n)-L(f,P_n)=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\frac{b-a}{n}-\sum_{k=1}^{n}f(x_{k-1})\frac{b-a}{n}=$$

$$=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(f(x_k)-f(x_{k-1})\big)=\frac{b-a}{n}\big(f(x_n)-f(x_0)\big)=\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n}$$

Έστω $\varepsilon>0$. Επιλέγοντας n : με $\dfrac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n}<\varepsilon$

Έχουμε $U(f,P_n)-L(f,P_n)<\varepsilon$.

Άρα, από κριτήριο Riemann η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Θεώρημα: Κάθε συνεχής συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη:

Καταρχάς, εφόσον η f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα, είναι φραγμένη.

Επίσης, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής (ως συνεχής σε κλειστό διάστημα).

Έστω $\varepsilon>0$.

Επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, $\exists \delta>0$ ώστε $\forall x,y\in[a,b]$ με $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$ (I)

Επιλέγουμε $n\in\mathbb{N}$ ώστε $\frac{b-a}{n}<\delta$ και θεωρούμε τη διαμέριση

$P_n=\{a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b\}$

$x_k=a+\frac{b-a}{n}k \quad k=0,1,\dots,n.$

Για κάθε $k=1,2,\dots,n$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_{k-1},x_k]$, λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε αυτό.

Δηλαδή $\exists \gamma_k,\delta_k\in[x_{k-1},x_k]$ ώστε $f(\gamma_k)\le f(x)\le f(\delta_k)$ $\forall x\in[x_{k-1},x_k]$.

Επειδή το διάστημα $[x_{k-1},x_k]$ έχει μήκος $\frac{b-a}{n}<\delta$, θα έχουμε $|\delta_k-\gamma_k|<\delta$.

Από την (I) προκύπτει $|f(\delta_k)-f(\gamma_k)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$

$M_k-m_k=f(\delta_k)-f(\gamma_k)=|f(\delta_k)-f(\gamma_k)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$

Έτσι, $U(f,P_n)-L(f,P_n)=\sum_{k=1}^{n}M_k(x_k-x_{k-1})-\sum_{k=1}^{n}m_k(x_k-x_{k-1})=$

$=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})<\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}(x_k-x_{k-1})=\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})=$

$=\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a)=\varepsilon.$

Σύμφωνα με το κριτήριο του Riemann, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη και $c\in\mathbb{R}$. Τότε, η cf είναι Riemann ολοκληρώσιμη και ισχύει:

$\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx.$

Απόδειξη:

• Αν $c=0$, τότε η cf είναι η μηδενική συνάρτηση που έχει ολοκλήρωμα ίσο με μηδέν και η ισότητα είναι προφανής

• Αν $c>0$, για τυχαία διαμέριση $P=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$, θέτουμε:

$$m_k=\inf\{f(x)\ \ x\in[x_{k-1},x_k]\}$$

$$M_k=\sup\{f(x)\ \ x\in[x_{k-1},x_k]\}$$

και $m_k'=\inf\{cf(x)\ \ x\in[x_{k-1},x_k]\}$

$$M_k'=\sup\{cf(x)\ \ x\in[x_{k-1},x_k]\}$$

Το $m_k'=cm_k$ και το $M_k'=cM_k$, αφού $c>0$.

$$L(cf,P)=\sum_{k=1}^{n}m_k'(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}cm_k(x_k-x_{k-1})=c\sum_{k=1}^{n}m_k(x_k-x_{k-1})=cL(f,P)$$

Ομοίως, $U(cf,P)=cU(f,P)$.

Έτσι, $\underline{\int_a^b}(cf)(x)dx=\sup\{L(cf,P)\ \ P$ διαμέριση στο $[a,b]\}=$

$=\sup\{cL(f,P)\ P$ διαμέριση στο $[a,b]\}=c\cdot\sup\{L(f,P)\ P$ διαμέριση στο $[a,b]\}=c\cdot\underline{\int_a^b}(cf)(x)dx$

Ομοίως, $\overline{\int_a^b}(cf)(x)dx=c\overline{\int_a^b}f(x)dx$.

Επειδή η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, ισχύει:

$$\underline{\int_a^b}f(x)\,dx=\overline{\int_a^b}f(x)dx.$$

Άρα, $\underline{\int_a^b}cf(x)dx=\overline{\int_a^b}cf(x)dx$, άρα η cf είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

• Αν $c<0$, για τυχαία διαμέριση $P=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$

ορίζουμε τα m_k, M_k, m_k', M_k', όπως και πριν.

$$m_k'=\inf\{cf(x)\ \ x\in[x_{k-1},x_k]\}\underset{c<0}{=}c\sup\{f(x)\ \ x\in[x_{k-1},x_k]\}=cM_k$$

$$M_k'=\sup\{cf(x)\ \ x\in[x_{k-1},x_k]\}\overset{c<0}{=}c\inf\{f(x)\ \ x\in[x_{k-1},x_k]\}=cm_k$$

$$L(cf,P)=\sum_{k=1}^{n}m_k'(x_k-x_{k-1})=c\sum_{k=1}^{n}M_k(x_k-x_{k-1})=cU(f,P).$$

Ομοίως, $U(cf,P)=cL(f,P)$.

$\int_{\underline{a}}^{b} (cf)(x)\,dx = \sup\{L(cf,P)$ P διαμέριση στο $[a,b]\} =$

$= \sup\{cL(f,P)$ P διαμέριση στο $[a,b]\} = c\inf\{U(f,P)$ P διαμέριση στο $[a,b]\} = c\cdot \int_{a}^{\bar{b}} f(x)\,dx$.

Ομοίως, $\int_{a}^{b} (cf)(x)\,dx = c\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx$.

Όμως, η f Riemann ολοκληρώσιμη άρα: $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{\bar{b}} f(x)\,dx$.

$\iff c\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx = c\int_{a}^{\bar{b}} f(x)\,dx \iff \int_{a}^{\bar{b}} (cf)(x)\,dx = \int_{\underline{a}}^{b} (cf)(x)\,dx$.

Δηλαδή, η cf είναι Riemann ολοκληρώσιμη.